7

Maria Zaharia

Caiet de vacanță

MATEMATICĂ

Suport teoretic, exerciții
și probleme aplicative

Ediția a V-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.

Redactare: Ramona Rossall, Daniel Mitran
Corectură: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță : matematică : clasa a VII-a : suport teoretic, exerciții și probleme aplicative / Maria Zaharia. – Ed. a 5-a. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4259-2
51

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) Dacă x este un număr natural, întreg sau rațional, atunci x^2 este .... lui x şi despre numărul x^2 se spune că este ....

b) Rădăcina pătrată a unui număr pozitiv a este numărul pozitiv notat ...., al cărui pătrat ....

2. a) Dacă a şi p sunt două numere pozitive, atunci $\sqrt{a} = p$ dacă şi numai dacă ....

b) Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural este ....

3. a) Operația prin care se află rădăcina pătrată a unui număr pozitiv se numeşte .... din acel număr.

b) Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-un pătrat perfect se descompune .... şi se foloseşte proprietatea $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} =$ ....

4. a) Prin estimare se înțelege ....

b) A estima rădăcina pătrată a unui număr înseamnă ....

5. a) Pentru a estima, pentru a aproxima prin adaos sau prin lipsă la un anumit ordin de mărime rădăcina pătrată dintr-un număr pozitiv care nu este pătrat perfect, se foloseşte ....

b) A calcula rădăcina pătrată a numărului 2, care nu este ...., cu o eroare mai mică decât 0,00001, înseamnă a scrie $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ cu ajutorul unui .... şi a scrie rezultatul luând în considerație doar .... zecimale, adică $\sqrt{2} =$ ....

6. a) Dacă $n \in \{0, 1, 2, 7, 11, 12\}$, atunci $n^2 \in \{$........................$\}$.

b) Dacă $n^2 \in \{9, 16, 25, 36, 64, 81, 100\}$, atunci $\sqrt{n^2} \in \{$..$\}$ = = ...

7. Se consideră mulțimea $M = \{8, 121, 72, 144, 49, 169\}$.

a) Elementele mulțimii M care sunt pătrate perfecte sunt ....

b) Rădăcinile pătrate ale numerelor naturale pătrate perfecte din mulțimea M sunt ....

8. a) Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi: ....

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul respectiv ....

....

9. a) Dacă ultima cifră a unui număr este 4, atunci numărul respectiv poate ....

.... sau ....

b) Numerele 14, 24, 34, 44, 54 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi nu sunt ....

c) Numerele 4, 64, 144, 324 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi sunt ....;
$4 = 2^2$; $64 = 8^2$; $144 = 12^2$; $324 = 18^2$.

10. a) Dacă $\sqrt{\overline{1xy}}$ este număr natural, atunci $\overline{1xy} \in$ ....

....

b) Dacă $\sqrt{\overline{3ab}}$ este număr natural, atunci $a + b \in$ ....

....

11. Rădăcinile pătrate ale numerelor:

a) $2^2 \cdot 3^4$; $2^6 \cdot 5^2$; $5^4 \cdot 7^2$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ sunt ....;

b) 576; 1024; 1764; 15876 sunt ....

12. a) Pătratele perfecte mai mici decât 51 sunt ....

b) Pătratele perfecte cuprinse între 200 şi 391 sunt ....

13. a) Mulţimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^2 \leq x < 6^2\}$ are .... elemente.

b) Numărul pătratelor perfecte cuprinse între 2^2 şi 7^2 este egal cu ....

14. Efectuând următoarele calcule se obţine:

a) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ ....;

b) $\sqrt{12^2 + 16^2} =$ ....;

c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^2} =$ ....;

d) $\sqrt{9 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5^2} =$ ....

15. a) Pătratele perfecte de trei cifre sunt: ....

....

b) Numerele de forma $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 7$ şi $5n + 8$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece

....

....

16. Folosind un calculator, scrieţi cu două zecimale exacte numerele:

a) $\sqrt{19} =$ ....; b) $\sqrt{111} =$ ....; c) $\sqrt{631} =$ ....

17. a) Două numere întregi consecutive între care se poate încadra numărul $\sqrt{31}$ sunt .... şi ....

b) Aproximarea prin lipsă la sutimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

c) Aproximarea prin adaos la miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

d) Rotunjirea la zecimi de miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

18. Numerele naturale x pentru care:

a) $4 < \sqrt{x} < 5$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{3} < x < \sqrt{19}$ sunt: ....

19. Trei numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{17}$ şi $\sqrt{18}$ sunt: ....

20. Se consideră mulțimile: $A = \left\{0; \frac{1}{2^0}; \frac{1}{2^1}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{64}{16}\right\}$ şi $B = \left\{\sqrt{x}, x \in A \text{ şi } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$. Cardinalul mulțimii B este ...., deoarece $B = \{$..................$\}$.

21. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{19}; \frac{1}{20}\right\}$. Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$ are .... elemente.

22. Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{0{,}16}; \sqrt{\frac{9}{49}}; \sqrt{\frac{121}{25}}; \sqrt{\frac{4}{169}}\right\}$. Numărul fracțiilor subunitare din această mulțime este egal cu ....

23. Calculând rădăcinile pătrate ale numerelor: $\frac{25}{49}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; 0,25; $\frac{1}{2500}$; $\frac{196}{324}$ se obțin rezultatele:

....

24. Precizați rădăcina pătrată a numărului n cu aproximație de o unitate (prin lipsă şi prin adaos) dacă:

a) $n = 37$; b) $n = 71$.

Soluţie: a) Deoarece $36 < 37 < 49$, adică $6^2 < 37 < 7^2$, rezultă că $6 < \sqrt{37} < 7$ şi $\sqrt{37} \approx 6$ (prin lipsă), respectiv $\sqrt{37} \approx 7$ (prin adaos).

....

....

25. Demonstrați că numărul $n = 2019 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 2018)$ este pătrat perfect.

CAPITOLUL II
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități. Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

1. **Relația de egalitate** în mulțimea numerelor reale are următoarele proprietăți:

a) **reflexivitate**, adică ....;

b) **simetrie**, adică ....;

c) **tranzitivitate**, adică ....

2. O egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă dacă:

a) **adunăm un număr la egalitate**: dacă $a = b$, atunci $a + c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) **reducem un termen dintr-o egalitate**: dacă $a + c = b + c$, atunci $a =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

c) **adunăm două egalități**: dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

d) **înmulțim egalitatea cu un număr**: dacă $a = b$, atunci $a \cdot c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

e) **împărțim egalitatea la un număr**: dacă $a \cdot c = b \cdot c$ și $c \neq 0$, atunci $a =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

f) **înmulțim două egalități**: dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră ecuația $3x^2 - 7 = 38 - 2x^2$. Rezolvați ecuația, specificând proprietățile folosite.

4. a) Dacă $a = b$, arătați că $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$.

b) Dacă $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$, arătați că $a = b$.

5. a) Se numeşte **identitate** ....

....

b) ● Identitatea $a \cdot (b + c) =$ .... reprezintă distributivitatea înmulţirii ....

....

● Identitatea $a \cdot b + a \cdot c =$ .... reprezintă scoaterea ....

....

● Identităţile servesc la .... şi ....

6. a) O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numeşte ....
Numerele a şi b sunt coeficienţii ecuaţiei (a este ...., iar b este ....
.................................). Numărul real x este .... sau .... ecuaţiei.

b) Se numeşte soluţie a ecuaţiei $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, un număr real $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziţia

....

7. a) A rezolva o ecuaţie înseamnă ....

b) Două ecuaţii se numesc echivalente dacă ....

....

c) Ecuaţiile $x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$, şi $\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$, sunt ...., deoarece ....

....

8. Ecuaţia $ax + b = 0$ se scrie:

a) pentru $a = -2$ şi $b = 1$ sub forma ....;

b) pentru $a = 1$ şi $b = -\sqrt{2}$ sub forma ....;

c) pentru $a = -0,(3)$ şi $b = 1,1(3)$ sub forma ....

9. Se consideră ecuaţia $ax + b = 0$, unde $a, b, x \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, ecuaţia se scrie ....,
cu $x \in \mathbb{R}$, şi are ca mulţime de soluţii ....

b) Dacă $a = 0$ şi b este număr real diferit de zero, ecuaţia se scrie ....
şi are ca mulţime de soluţii ....

c) Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

10. Dintre elementele mulţimii $\{-\sqrt{2}; 0; -1; 3; 2\}$, soluţie a ecuaţiei $3x - 2 = -5$ este ....,
deoarece înlocuind elementele din mulţime se obţine ....

....

....

....

....

....

11. Se consideră ecuația $3(x-2)+11=2(3x-1)+x$. Verificați dacă:

a) numărul -2 este soluție a ecuației;

b) numărul 1,75 este soluție a ecuației;

c) numărul $\sqrt{3}$ este soluție a ecuației.

Soluție:

a) Pentru $x = -2$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = -2$ ....;

b) Pentru $x = 1{,}75$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = 1{,}75$ ....;

c) Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = \sqrt{3}$ ....

12. Soluția ecuației $\sqrt{2}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=6$ este $x =$ ...., deoarece $\sqrt{2}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=6 \Leftrightarrow$ ....

....

....

13. a) Dacă $3x-1=5$, atunci $3x =$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

b) Dacă $\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{6}=0$, atunci $\sqrt{2}\cdot x =$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $0{,}2x-0{,}8=0$; b) $\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x=\sqrt{2}-2$; c) $0,(3)\cdot x-\frac{1}{2}=2{,}5$.

Soluție:

a) $0{,}2x-0{,}8=0 \Leftrightarrow 0{,}2x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....;

b) $\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x=\sqrt{2}-2 \Leftrightarrow x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....;

c) $0,(3)\cdot x-\frac{1}{2}=2{,}5 \Leftrightarrow 0,(3)\cdot x=2{,}5+0{,}5 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

15. Se consideră ecuația $5x+m=0$, unde $m, x \in \mathbb{R}$. Rezolvați ecuația pentru:

a) $m=-5$; b) $m=0{,}2$; c) $m=-\sqrt{5}$.

Soluție:

a) Înlocuind pe m cu -5 se obține $5x-5=0 \Leftrightarrow$ ....

b) ....

c) Înlocuind pe m cu $-\sqrt{5}$ se obține .... $\Leftrightarrow x =$ ....

16. a) Scrieți soluția rațională a ecuației $(x-3)\left(2x-\sqrt{3}\right)=0$.

b) Scrieți soluția naturală a ecuației $|x-1| = 5$.

c) Scrieți soluția reală a ecuației $\sqrt{3}\cdot x-3=3x-3\sqrt{3}$.

Soluţie:

a) Din $(x-3)\left(2x-\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow$ .... sau ....,
adică $x =$ .... sau .... Dar $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x =$ ....

b)

c)

17. a) Rezolvați ecuația $3x-\sqrt{3}=\sqrt{27}$.

b) Aflați $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = \sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $mx + 2 = 2\sqrt{2}$.

Soluţie:

a) $3x-\sqrt{3}=\sqrt{27} \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....;

b) Înlocuind pe x cu $\sqrt{2}-1$ se obține ....
.... $\Rightarrow$ ....

18. a) Rezolvați ecuația $\left|-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right|=\sqrt{27}$.

b) Scrieți soluția rațională a ecuației $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}=0$.

Soluţie:

a)

b)

19. Se consideră mulțimea $A = \left\{\sqrt{3}; 0; -\sqrt{3}; 1\right\}$. Verificați care dintre elementele mulțimii A este soluție a ecuației $3x-2\sqrt{3}=x-\sqrt{48}$.

Soluţie:

Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ....
....
.... $\Rightarrow x =$ .... este soluție.

20. a) Calculați pentru ce valoare a parametrului m ecuația $2mx = 3 + 2x$ are soluția $x = -1$.

b) Calculați pentru ce valoare a parametrului a ecuația $ax + 1 = x - a$ are soluția $x = 0,(6)$.

c) Calculați pentru ce valoare a parametrului m ecuația $mx - \sqrt{3} = x - m\sqrt{3}$ are soluția $x = \sqrt{3}$.

Soluție:

a) Pentru $x = -1$ se obține ………………………………………………………………… .

b) Pentru $x = 0,(6) = \frac{6^{(3}}{9} = \frac{2}{3}$ se obține …………………………………………………

………………………………………………………………………………………………… .

c) Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ……………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………… .

II.2 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

1. Scrierea $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sunt numere reale date și $x \in \mathbb{R}$, reprezintă forma generală a ………………………………………………………………… .

2. a) O pereche de numere reale (x_0, y_0) se numește **soluție a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** dacă ………………………………………………………… .

b) **A rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** înseamnă ……………………

………………………………………………………………………………………………… .

c) Două sisteme sunt **echivalente** ……………………………………………………………… .

3. Sistemele de două ecuații liniare cu două necunoscute se pot rezolva prin următoarele metode:

………………………………………………………………………………………………… .

4. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$. Verificați dacă este soluție a sistemului perechea:

a) $(1, 8)$; b) $(-4, 1)$; c) $(-1, 2)$.

CAPITOLUL II
CERCUL

1. a) Printr-un punct A se pot construi .... de cercuri (figura 1.a).

b) Prin două puncte se pot construi .... de cercuri, centrele lor aflându-se pe .... (figura 1.b).

c) Prin trei puncte necoliniare se poate construi ...., centrul cercului fiind punctul de intersecție .... (figura 1.c).

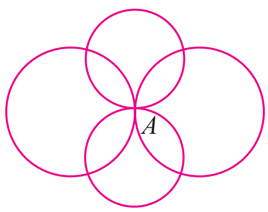

Fig. 1.a

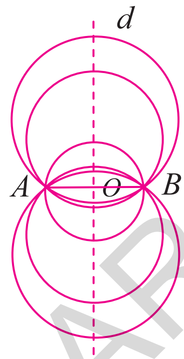

Fig. 1.b

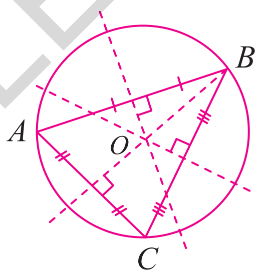

Fig. 1.c

2. a) Într-un cerc sau în cercuri congruente, arcelor congruente le corespund ....

b) Într-un cerc sau în cercuri congruente, coardelor congruente le corespund ....

3. Analizați figurile de mai jos și completați propozițiile:

a) Dacă $OD \perp AB$, atunci $BC \equiv$ .... și $\overset{\frown}{BD} \equiv$ ....

b) Dacă $AB \parallel CD$, atunci ....

c) Dacă $AB \equiv CD$, atunci ....

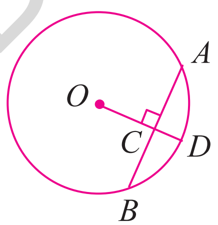

Fig. 2.a

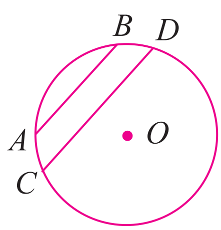

Fig. 2.b

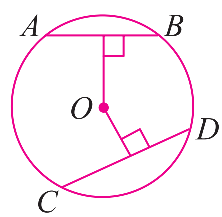

Fig. 2.c

4. Calculați razele cercurilor din figura 3, știind că $O_1O_2 = 18$ cm, $O_1O_3 = 14$ cm, $O_2O_3 = 10$ cm.

....

....

....

....

....

....

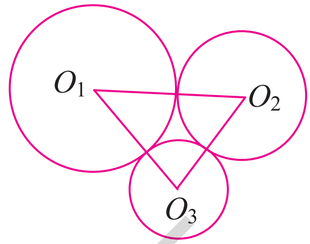

Fig. 3

5. a) O dreaptă care are un singur punct comun cu un cerc se numește ....

b) Distanța de la centrul cercului la tangentă este ....

c) Tangentele dintr-un punct exterior la un cerc ....

6. În figurile 4.a și 4.b completați desenele, astfel încât:

a) *PA* și *PB* să fie tangente dintr-un punct exterior la un cerc, iar dreapta *a* să fie tangentă la cerc în punctul *M*;

b) dreptele a_1 și a_2 să fie tangente comune interioare;

c) dreptele b_1 și b_2 să fie tangente comune exterioare.

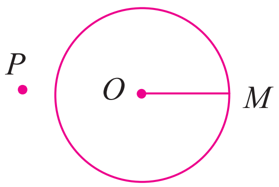

Fig. 4.a

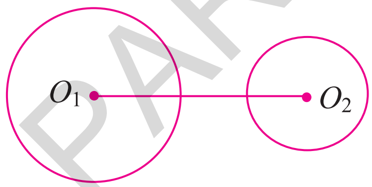

Fig. 4.b

7. În figura 5, *AB*, *AC* și *DE* sunt tangente la cerc. Dacă *AB* = 8 cm, atunci perimetrul triunghiului *ADE* este ....

....

....

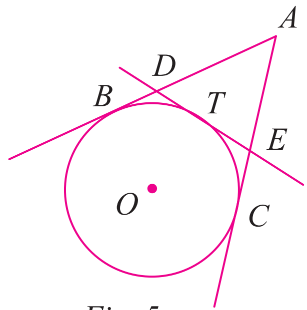

Fig. 5

8. În figura 6, *AB*, *AC* și *DE* sunt tangente la cerc.

a) *AB* = *AC*, deoarece $\Delta AOB \equiv$ ....

....

b) Măsura unghiului *AOE* este egală cu ....

....

....

....

....

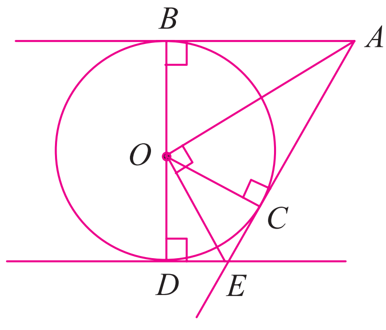

Fig. 6

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE